ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Ф. К. Ахмадишина

Казанский государственный технологический университет

Рассмотрим уравнения

$$Kx = y \quad (x \in X, y \in Y), \tag{1}$$

$$P_n K x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n). \tag{2}$$

Здесь X, Y – нормированные пространства над C или R, $K : X \to Y$ – линейная биекция, n – фиксированное натуральное число, X_n и Y_n – n-мерные подпространства в X и Y соответственно, P_n – линейная сюръекция из Y на Y_n. Уравнение (2) называется *проекционным методом* решения уравнения (1), заданным оператором P_n и подпространством приближенных решений X_n. Решение уравнения (1) будем обозначать x^* $(= x^*(y))$. Мы рассматриваем только те проекционые методы (2), которые однозначно разрешимы для любого $y \in Y$. Обозначим через x_n^* $(= x_n^*(y))$ решение уравнения (2), а через $E_n(x)$ – наилучшее приближение элемента $x \in X$ подпространством X_n.

Будем говорить, что проекционный метод (2) решения уравнения (1) является для множества решений F асимптотически оптимальным, если

$$\sup_{x^* \in F} \|x^* - x_n^*\| \sim \sup_{x^* \in F} E_n(x^*) \quad (n \to \infty).$$

Для множества $G \subset X$ положим

$$E(G, X_n) =: \sup_{x \in G} E_n(x).$$

Последовательность подпространств X_n в X будем называть полной, если $E_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ для любого $x \in X$. Положим

$$W_2^r = \{f(t) : \ f \in L_2^r, \ \|f^{(r)})\| \le 1\}, \ r = 1, 2, \ldots$$

Пусть Y – гильбертово пространство, X – плотный линеал в Y. Рассмотрим уравнение

$$Kx =: (A + B)x = y \quad (x \in X, y \in Y). \tag{3}$$

Ниже приводится теорема, которая может быть использована для обоснования и нахождения оценки погрешности проекционных методов решения краевых задач.

Теорема 1. *Пусть существует обратный к A компактный оператор $A^{-1} : Y \to X$, B – непрерывный оператор, X_n – полная последовательность подпространств в X, $Y_n \subset D(A^*)$ $(n \geq n_0)$, P_n – ортопроектор на Y_n, S_n^1 – единичная сфера в $A^*(Y_n)$ и $E(S_n^1, X_n) \to 0$ $(n \to \infty)$. Предположим, что однородное уравнение, соответствующее уравнению (3), имеет только нулевое решение. Тогда для любого множества решений F имеет место оценка*

$$\sup_{x^* \in F} \|x^* - x_n^*\| \sim \sup_{x^* \in F} E_n(x^*) \quad (n \to \infty).$$

Если, кроме того, X_n является экстремальным подпространством для n-го проекционного поперечника центрально-симметричного множества F $(n \geq n_0)$, то

$$\sup_{x^* \in F} \|x^* - x_n^*\| \sim \pi_n(F) \quad (n \to \infty),$$

где $\pi_n(F)$ – n-й проекционный поперечник множества F. Приведем примеры применения теоремы 1.

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$Kx = x'(t) + p(t)x(t) = y(t),$$

где решение x ищется в L_2^1, $p(t) \in L_2$. Приближенные решения x_{2n+1} будем искать в виде тригонометрического полинома степени n, т.е.

$$x_{2n+1}(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikt},$$

неизвестные коэффициенты α_k которого определим из следующей системы $2n+1$ линейных алгебраических уравнений

$$(x'_{2n+1}(t) + p(t)x_{2n+1}(t) - y, e^{ikt}) = 0 \quad (k = -\overline{n,n}). \tag{4}$$

Введем оператор

$$(Lx)(t) = x(t) + \int_0^t p(s)x(s)ds.$$

Можно доказать, что существует непрерывный $L^{-1}: L_2 \to L_2$. Пусть $M = \|L^{-1}\|$. Положим $\beta_n = \pi M\ (\ \omega(p, \pi/n)_2 + \|p\| n^{-1/2}\ )$. Тогда, если $\beta_n < 1$, то для проекционного метода (4) будет справедлива оценка

$$\sup_{x^* \in F} \|x^* - x^*_{2n+1}\| \leq \frac{1}{\sqrt{1-\beta_n^2}} \sup_{x^* \in F} E_{2n+1}(x^*).$$

Если, кроме того, $F = W_2^r$, то $\sup_{x^* \in W_2^r} \|x^* - x^*_{2n-1}\| \sim n^{-r}$ $(n \to \infty)$.

Пример 2. Рассмотрим задачу

$$\frac{d^2x}{dt^2} + q(t)\frac{dx}{dt} + p(t)x(t) = y(t),\ x(0) = x(1) = 0, \tag{5}$$

где $p(t), q(t) \in L_2[0,1]$. Пусть $X_n = \mathrm{Lin}\{\sin k\pi t,\ \ k = \overline{1,n}\}$, P_n – ортопроектор на X_n. Тогда для проекционного метода (2) решения задачи (5) справедлива оценка

$$\sup_{x^* \in F} \|x^* - x^*_n\| \sim \sup_{x^* \in F} E_n(x^*)\ \ (n \to \infty).$$

Пример 3. Рассмотрим задачу

$$\frac{d^2x}{dt^2} + q(t)\frac{dx}{dt} + p(t)x(t) = y(t),\ x(0) = x'(0) = 0, \tag{6}$$

где $p(t), q(t) \in L_2[0,1]$. Пусть $X_n = t^2 \mathrm{Lin}\{1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}\}$, P_n – ортопроектор на подпространство $Y_n = t^2 \cdot X_n$. Тогда для проекционного метода (2) решения уравнения (6) справедлива оценка

$$\sup_{x^* \in F} \|x^* - x^*_n\| \sim \sup_{x^* \in F} E_n(x^*)\ \ (n \to \infty).$$

Пример 4. Рассмотрим задачу Гурса

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s} + (Tx)(t,s) = y(t,s) \quad (0 \leq t \leq a < \infty,\ \ 0 \leq s \leq b < \infty),$$

$$x(t,0) = 0 \quad (0 \leq t \leq a), \;\; x(s,0) = 0 \;\; (0 \leq s \leq b), \tag{7}$$

где $y(t,s)$ – известная квадратично-суммируемая функция в области $D = \{0 \leq t \leq a, 0 \leq s \leq b\}$, а T – некоторый непрерывный линейный оператор.

С помощью одномерных сеток разобьем область D на частичные прямоугольники $\pi_{i,j} = [t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$

$$\delta_n^{(1)} : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = a, \; \pi_i^{(1)} = t_{i+1} - t_i (i = \overline{0, n-1}), \tag{8}$$

$$\delta_m^{(2)} : 0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = a, \; \pi_j^{(2)} = s_{i+1} - s_i (j = \overline{0, m-1}). \tag{9}$$

Пусть, далее, $\|\delta_n^{(1)}\| = \max_i \pi_i^{(1)}$, $\|\delta_m^{(2)}\| = \max_j \pi_j^{(2)}$. Относительно последних будем предполагать, что $\|\delta_n^{(1)}\| \to 0$ при $n \to \infty$ и $\|\delta_m^{(2)}\| \to 0$ при $m \to \infty$. Приближенное решение задачи (7) будем искать в виде двумерного сплайна второй степени на сетке $\delta_{n,m} = \delta_n^{(1)} \times \delta_m^{(2)}$ вида

$$x_{n,m}(t,s) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} c_{i,j} B_{n,i}(t) B_{m,j}(s),$$

где $B_{n,0}(t) = t$, $B_{m,0}(s) = s$, а $B_{n,i}(t)$, $B_{m,j}(s)$ – суть одномерные параболические сплайны (см., напр., [3]) на сетке (8) с носителем (t_{j-1}, t_{j+2}) и на сетке (9) с носителем (s_{j-1}, s_{j+2}) соответственно $(i = 1, 2 \ldots, n; \quad j = 1, 2 \ldots, m)$. Пусть $P_{n,m}$ – ортопроектор на подпространство $Y_{n,m} = ts \cdot \mathrm{Lin}\{x_{n,m}\}$. Предположим, что однородное уравнение, соответствующее уравнению (7), имеет только нулевое решение. Тогда проекционный метод (2) решения задачи (7) будет асимптотически оптимальным для любого множества решений F.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахмадишина Ф.К. *Оптимизация проекционных методов решения линейных операторных уравнений.* Канд. диссерт. – Казань, 1993. – 78 с.

2. Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1995. – 232 с.

3. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. *Методы сплайн-функций.* – М.: Наука, 1980. – 352 с.